CHAPITRE 00 : QUELQUES NOTIONS DE LOGIQUE

I- LE LANGAGE MATHEMATIQUE :

Les mots : chaque mot employé dans une phrase mathématique a un sens précis qui ne doit faire l'objet d'aucune ambiguïté.
Ainsi , parler d'un nombre est ambigu , et il faut préciser s'il s'agit d'un nombre réel, ou d'un entier, ou d'un entier relatif, etc.….

Les objets : le raisonnement mathématique porte sur des objets mathématiques, auxquels on donne souvent un nom , afin de faciliter la rédaction.
Les **constantes** , comme $\pi, e \ldots$
Les **variables**, que l'on nomme de diverses manières lorsqu'il s'agit de nombres $(n, x, y, z, ...)$, de points $(A, B, M, ...)$, de fonctions $(f, g, \varphi, ...)$

Les propositions : On appelle proposition toute affirmation ayant un sens, et à laquelle on peut clairement attribuer la valeur « VRAI » ou « FAUX ».
Par exemple, « $1+1=3$ » est une proposition fausse, et « 17 est un nombre premier » est une proposition vraie.
Nous noterons par la suite $P, Q, R, \ldots$ des propositions.
Une proposition peut dépendre d'une ou plusieurs variables, et peut alors prendre la valeur V ou F suivant les valeurs attribuées à ces variables. Nous noterons $P(x)$ une proposition dépendant d'une variable x.
Par exemple , la proposition $P(n)$: "n est un nombre premier" est parfois vraie, parfois fausse.

Principe du tiers exclu : ce principe énonce qu'une proposition donnée prend la valeur vraie, ou bien la valeur fausse. *(c'est-à-dire qu'une proposition qui n'est pas vraie est obligatoirement fausse)*

En notant 1 la valeur « Vrai » et 0 la valeur « Faux » d'une proposition, on peut résumer l'état d'une proposition P par une table de vérité.

P
1
0

Principe de non contradiction : ce principe énonce qu'une proposition n'est jamais à la fois vraie ou fausse.

On appelle propriété une proposition vraie.

II- LES ENSEMBLES et les QUANTIFICATEURS :

1. Les ensembles :

Un ensemble E est une collection d'objets bien définis et identifiables, que l'on appelle les éléments de E .
Pour exprimer qu'un objet x est un élément de E , on écrit : $x \in E$, qui se lit « x appartient à E », et on écrit $x \notin E$ le fait que x ne soit pas un élément de E .
Deux ensembles E et F sont égaux lorsqu'ils ont les mêmes éléments. On écrit $E = F$.

Une partie A d'un ensemble E est défini soit par ses éléments , soit par une propriété caractérisant ses éléments , et dans ce cas on écrit : $A = \{x \in E, P(x)\}$, ou encore $A = \{x \in E / P(x)\}$
Exemple : l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 4$ est : $S = \{-2; 2\}$.
L'ensemble des entiers naturels pairs est : $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 | x\}$.

2. Les quantificateurs :

On définit les deux symboles $\forall$ et $\exists$, appelés quantificateurs, de la manière suivante :

A. « Quel que soit » :
Pour exprimer qu'une propriété $P(x)$ est vérifiée pour tous les éléments x d'un ensemble E , on écrit :
$\forall x \in E, P(x)$, qui se lit : *« pour tous les éléments x de E, la propriété P(x) est vérifiée. »*

Remarque : la proposition $\forall x \in E, P(x)$ peut être elle-même vraie ou fausse.

Exemple : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ est une affirmation vraie, mais $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$ est fausse.

B. « Il existe » :

Pour exprimer qu'il existe au moins un élément de E tel que la propriété $P(x)$ soit vérifiée , on écrit :
$\exists x \in E, P(x)$, qui se lit : *« il existe (au moins) un élément x de E qui vérifie la propriété P(x) »*

Exemple : La proposition $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = -1$ est fausse, mais la proposition $\exists x \in \mathbb{C}, x^2 = -1$ est vraie.

C. Quantificateurs successifs :

De nombreux énoncés mathématiques demandent, pour être formalisés en langage mathématique, l'usage de plusieurs quantificateurs.

Exemple : La propriété : « tout réel possède un opposé » s'exprime : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$.

On retiendra que :

- Deux quantificateurs de même nature qui se suivent peuvent être intervertis dans une proposition..

Ceci signifie que : $\forall x, \forall y$ a le même sens que $\forall y, \forall x$ et $\exists x, \exists y$ a le même sens que $\exists y, \exists x$.

- Un quantificateur $\forall$ et un quantificateur $\exists$ ne peuvent être intervertis sans changer le sens mathématique de la proposition.

Exemple :
La proposition $\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, n^2 \leq M$ est vraie : L'entier *n* étant choisi, il suffit de prendre $M = n^2$.
La proposition $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, n^2 \leq M$ est fausse : en effet la suite (n^2) n'est pas bornée.

III- LES CONNECTEURS et LES TYPES de RAISONNEMENT :

1. La négation : Lorsque *P* est une proposition , la négation de *P* est une proposition , notée « non *P* », qui est vraie lorsque *P* est fausse et fausse lorsque *P* est vraie.
Sa table de vérité est :

P	non *P*
1	0
0	1

2. Le ET : A partir de deux propositions *P*,*Q* on définit une nouvelle proposition , « *P* et *Q* » , qui est vraie lorsque les deux propositions sont vraies, et fausses dans les autres cas. On peut ainsi définir cette nouvelle proposition par sa table de vérité.

P	*Q*	*P* et *Q*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Exemple :
Soit P : 12 est divisible par 3 ,*Q* : L'ours est un mammifère ,et *R*: Le prof de maths a moins de 18 ans.
La proposition *P* et *Q* est vraie, la proposition *P* et *R* est fausse.

3. Le OU : A partir de deux propositions *P*,*Q* on définit une nouvelle proposition , « *P* ou *Q* » , qui est vraie lorsque l'une au moins des deux propositions est vraie ; la proposition « *P* ou *Q* » est donc fausse lorsque les deux propositions sont simultanément fausses . On peut ainsi définir cette nouvelle proposition par sa table de vérité.

P	*Q*	*P* ou *Q*
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exemple : la proposition « l'ours est un mammifère ou le prof de maths a moins de 18 ans » est vraie.

Remarque : en particulier, lorsque les deux propositions P et Q sont vraies, la proposition « P ou Q » l'est aussi. On dit que le « OU » est inclusif.
Lorsqu'on emploie en mathématiques un « OU » exclusif, que l'on rencontre par exemple au restaurant (« fromage ou dessert »), on précisera « Ou bien ».

4. L'implication :

L'acte mathématique consistant à énoncer une proposition Q vraie à partie d'une proposition P supposée vraie s'appelle la déduction. On dit qu'on prouve Q à partir de P . Une étape élémentaire de cette preuve est l'implication. Lorsqu'on produit des implications, on emploie les verbes « impliquer , déduire, entraîner.. ». On dira alors : « la proposition P entraîne (ou implique) la proposition Q ».

Définition : P et Q étant deux propositions, on note $P \Rightarrow Q$ la proposition qui est vraie lorsque le passage de P à Q est vrai, c'est-à-dire lorsque : Si P est vraie, alors Q est vraie.

La table de vérité est la suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

On constate en particulier l'implication $P \Rightarrow Q$ est fausse uniquement lorsque P est vraie et Q est fausse. Et donc , lorsque la proposition P est fausse, l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie.

Exercices :

Vrai ou faux ?

(a1) $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x+1 \in \mathbb{N}$ (b1) $\frac{1}{2} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{2}+1 \in \mathbb{N}$ (c1) $\frac{1}{2} \in \mathbb{N}$, donc $\frac{1}{2}+1 \in \mathbb{N}$

(a2) $x+1=3 \Rightarrow x=2$ (b2) $1+1=3 \Rightarrow 1=2$ (b2) 1+1=3, donc 1=2.

(a3) Soit $x \in \mathbb{R}$: $x^2 < 0 \Rightarrow x^2 - 1 < 0$ (b3) 2 est un réel. $2^2 < 0$, donc $2^2 - 1 < 0$.

On retiendra : Le symbole mathématique $\Rightarrow$ ne signifie pas « donc ».

5. L'équivalence :

On peut former, à l'aide des connecteurs déjà définis, de nouvelles propositions plus complexes.
Exemple : dressons la table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Cette nouvelle proposition est vraie lorsque les deux propositions P et Q sont simultanément vraies, ou simultanément fausses. Elle et appelée « équivalence » , et notée : $P \Leftrightarrow Q$.

Remarques : Certaines locutions usuelles font référence à l'implication de manière directe. Comme elles interviennent très souvent dans les textes de démonstration, il est important d'en connaître le sens exact.
Concernant l'implication : $P \Rightarrow Q$, On peut dire : P est une condition **suffisante** pour Q ; pour que Q soit vraie**, il suffit** que P le soit ; Q est une condition **nécessaire** pour P ; pour que P soit vraie, il **faut** que Q le soit.
Concernant l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on peut dire : P est une condition **nécessaire et suffisante** pour Q ; pour que P soit vraie, **il faut et il suffit** que Q le soit ; P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

6. Le syllogisme :

Le syllogisme est la règle logique fondamentale. Elle exprime le fait que :
Si la proposition P est vraie, et si l'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors la proposition Q est vraie.

Ceci exprime que la proposition $\left[P \text{ et } (P \Rightarrow Q\right] \Rightarrow Q$ est toujours vraie.
Pour le vérifier, dressons la table de vérité de cette proposition :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	P et $(P \Rightarrow Q)$	$\left[P \text{ et } (P \Rightarrow Q\right] \Rightarrow Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Les théorèmes mathématiques expriment en général des implications vraies.

Exemple : Le théorème de Pythagore s'énonce :
Soient A, B, C trois points. $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow$ le triangle ABC est rectangle en B.
On considère 3 points A, B, C tels que $AB = 5, BC = 12, AC = 13$. Montrer que le triangle est rectangle en B (propriété Q).
On a : $AB^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 13^2 = AC^2$ (propriété P). L'implication $P \Rightarrow Q$ est vraie, et donc Q est vraie.

7. Réciproque et contraposée :

Etant donnée une implication $P \Rightarrow Q$, on appelle $Q \Rightarrow P$ la réciproque de cette implication , et on appelle $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$ la contraposée de cette implication.

Remarque 1 : Une implication et sa réciproque n'ont pas la même table de vérité.
(Voir la table de vérité de l'équivalence)
Remarque 2 : Une implication et sa contraposée ont la même table de vérité.

P	Q	non Q	non P	$(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$
1	1	0	0	1
1	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

Donc pour démontrer une implication, on pourra parfois démontrer sa contraposée (mais pas sa réciproque !!!).

Exemple de rédaction (fausse)

Pour tous nombres réels a et b de même signe , on a : $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. En effet :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 4ab \geq 0 \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 .$$

Or, la dernière inégalité est vraie, donc la 1$^{\text{ère}}$ aussi……

C'est évidemment faux, car lorsque $a = b = -2$ la 1$^{\text{ère}}$ inégalité est fausse, alors que la dernière est vraie.

Exercices :
- Les réels x et y quelconques, démontrer que : $(x \neq y) \Rightarrow (x^3 + x \neq y^3 + y)$.
La contraposée s'écrit : $(x^3 + x = y^3 + y) \Rightarrow (x = y)$.
- Etant donné un entier naturel n, démontrer que : Si n^2 est pair, alors n est pair.